

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 4

Przestrzenie L^∞ . Operatory ograniczone.

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie L^∞ (funkcji istotnie ograniczonych)

Niech (Ω, Σ, μ) będzie ustaloną przestrzenią z miarą.

Def. Funkcja mierzalna $x : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ jest **istotnie ograniczona**, jeśli jest ograniczona poza zbiorem miary zero. Zbiór takich funkcji

$$L^\infty(\mu) := \{x : \Omega \rightarrow \mathbb{F} \text{ mierzalna} : \exists_{A \in \Sigma, \mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} |x(t)| < \infty\}$$

tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, gdzie


$$(x+y)(t) := x(t)+y(t), \quad (\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{działania} \\ \text{określone} \\ \text{punktowo!} \end{array} \right)$$

Elementy przestrzeni $L^\infty(\mu)$ mają skończone **supremum istotne**


$$\|x\|_\infty := \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} |x(t)| = \min_{\mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} |x(t)| \quad \img alt="house icon" data-bbox="895 740 937 795"/>$$


Uwaga: $\|x\|_\infty = 0 \iff \mu(\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}) = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} x \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} 0$

Konwencja:

W przestrzeni $L^\infty(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe μ -pw (formalnie elementami $L^\infty(\mu)$ są klasy abstrakcji relacji $y \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} x$)
Wtedy $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią unormowaną! 

Thm. $L^\infty(\mu)$ z normą $\|x\|_\infty$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: 

Uw. $x_n \xrightarrow{L^\infty} x \iff x_n|_{\Omega \setminus A} \rightrightarrows x|_{\Omega \setminus A}$ gdzie $\mu(A) = 0, A \in \Sigma$ 

Prz. Jeśli μ miara licząca, to szczególnymi przypadkami $L^\infty(\mu)$ są

- $B(\Omega) := \{x : \Omega \rightarrow \mathbb{F} : \sup_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty\}$ z normą $\|x\|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |x(t)|$ (**przestrzeń funkcji ograniczonych**)
- ℓ^∞ z normą $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$
- \mathbb{F}^n z normą $\|x\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |x(k)|$

Klasyczne przestrzenie Banacha (ściągałka)

W poniższej tabelce $p \geq 1$.

Ozn.	przestrzeń Banacha	norma
$C_b(\Omega)$	funkcje ciągłe i ograniczone	$\ x\ _\infty = \sup_{t \in \Omega} x(t) $
$C_0(\Omega)$	funkcje ciągłe, znikające w nieskończoności	$\ x\ _\infty = \max_{t \in \Omega} x(t) $
$L^p(\mu)$	„funkcje” całkowne w p -tej potędze	$\ x\ _p = \left(\int_{\Omega} x(t) ^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$
$L^\infty(\mu)$	„funkcje” istotnie ograniczone	$\ x\ _\infty = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} x(t) $
ℓ^∞	ciągi ograniczone	$\ x\ _\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} x(k) $
ℓ^p	ciągi sumowalne w p -tej potędze	$\ x\ _p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x(k) ^p \right)^{\frac{1}{p}}$
c	ciągi zbieżne	$\ x\ _\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} x(k) $
c_0	ciągi zbieżne do zera	$\ x\ _\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} x(k) $

Operatory ograniczone

$(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ ustalone przestrzenie unormowane.

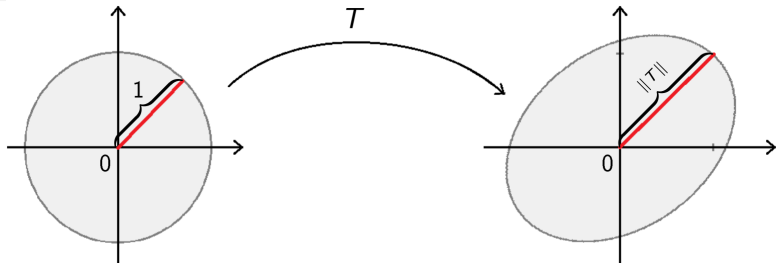
Def. Operatorami nazywamy odwzorowania liniowe $T : X \rightarrow Y$.
Powiedzmy, że operator T jest **ograniczony** jeżeli

$$\exists C \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \|Tx\| \leq C\|x\| \quad \left(\begin{array}{l} \text{nierówność} \\ \text{ograniczoneści} \end{array} \right)$$

Normą operatora nazywamy najmniejszą stałą C w powyższej nierówności

$$\|T\| := \inf \{ C : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ dla każdego } x \in X \}$$

Stw. $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$



Operatory ograniczone

$(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ ustalone przestrzenie unormowane

Def. Operatorami nazywamy odwzorowania liniowe $T : X \rightarrow Y$.
Powiedzmy, że operator T jest **ograniczony** jeżeli

$$\exists C \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \|Tx\| \leq C\|x\| \quad \left(\begin{array}{l} \text{nierówność} \\ \text{ograniczoneści} \end{array} \right)$$

Normą operatora nazywamy najmniejszą stałą C w powyższej nierówności

$$\|T\| := \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ dla każdego } x \in X\}$$

Stw. $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

T jest ograniczony
 $\iff \|T\| < \infty$

Dowód: Zauważmy, że $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, dla $x \in X$. Zatem

$$C := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \|T\|. \quad (\dagger)$$

Czyli $\|T\| < \infty \implies C < \infty$. Jeśli $C < \infty$ i $x \in X \setminus \{0\}$, to $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ i

$$\|T \frac{x}{\|x\|}\| \leq C \iff \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq C \iff \|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Stąd $\|T\| \leq C$. Z zatem z (\dagger) teza. ■

Tw. Dla dowolnego operatora $T : X \rightarrow Y$ NWSR:

- 1 T jest ograniczony
- 2 T jest odwzorowaniem ciągłym
- 3 T jest ciągłe w pewnym punkcie $x_0 \in X$
- 4 T jest ciągłe w zerze

Dowód: (1) \Rightarrow (2). Ograniczony T ma własność Lipschitza:

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\|.$$

Zatem $x \rightarrow y \implies Tx \rightarrow Ty$. Czyli T ciągłe.

(2) \Rightarrow (3). Jasne (funkcja jest ciągła $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ jest ciągła w każdym punkcie)

(3) \Rightarrow (4). Jeśli $x_n \rightarrow 0$, to $x_n + x_0 \rightarrow x_0$. Zatem z ciągłości T w x_0

$$Tx_n = T(x_n + x_0) - Tx_0 \longrightarrow Tx_0 - Tx_0 = 0 = T(0).$$

Czyli operator T jest ciągły w zerze.

(4) \Rightarrow (1). Załóżmy, że T nieograniczony. Wówczas istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\|x_n\| = 1$ oraz $\|Tx_n\| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, czyli $\frac{x_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, oraz $\|T \frac{x_n}{\sqrt{n}}\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|Tx_n\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \rightarrow \infty$. Zatem T nie jest ciągły w zerze. ■


Tw. (Zasada ciągłego przedłużania operatorów)

Operator ograniczony $T : X_0 \rightarrow Y$ określony na gęstej podprzestrzeni $X_0 \subseteq X$ o wartościach w przestrzeni Banacha Y **przedłuża się jednoznacznie** do ograniczonego operatora

$$\bar{T} : X \rightarrow Y \quad \text{oraz} \quad \|T\| = \|\bar{T}\|.$$

Dowód: Niech $x_0 \in X = \overline{X_0}$. Weźmy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X_0$ zbieżny do x_0 . Wtedy $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ jest Cauchy w Y , gdyż

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \rightarrow 0, \quad \text{przy } n, m \rightarrow \infty.$$

Skoro Y zupełna, to $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego $y_0 \in Y$. Granica y_0 nie zależy od wyboru ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 

Kładąc $\bar{T}x_0 := y_0$ otrzymujemy poprawnie zdefiniowany operator $\bar{T} : X \rightarrow Y$ będący przedłużeniem T . Ponadto

$$\|\bar{T}x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| \cdot \|x_0\|.$$

Czyli \bar{T} jest ograniczony oraz $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$.

Nierówność $\|T\| \leq \|\bar{T}\|$ jasna, bo \bar{T} przedłużenie T . ■

Prz. 1 (całkowanie)

Niech $X := L^1(\mu)$ oraz $Y := \mathbb{F}$. Wtedy całka

$$T_X := \int_{\Omega} x(t) d\mu(t), \quad x \in L^1(\mu),$$

jest operatorem ograniczonym $T : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{F}$ oraz $\|T\| = 1$:

$$|T_X| = \left| \int_{\Omega} x(t) d\mu(t) \right| \leq \int_{\Omega} |x(t)| d\mu(t) = 1 \cdot \|x\|_1,$$

skąd $\|T\| \leq 1$. Z drugiej strony biorąc dowolny zbiór mierzalny $A \subseteq \Omega$ taki, że $0 < \mu(A) < \infty$ i kładąc $x := \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{1}_A$ mamy

$$\int_{\Omega} x d\mu = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{1}_A d\mu = 1,$$

czyli $\|x\|_1 = 1$ oraz $|T_X| = 1$, skąd $1 \leq \|T\|$. Czyli $\|T\| = 1$.

Prz. 2 (Różniczkowanie)

Niech $X := C^{(1)}([0, 1])$ przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły i niech $Y = C([0, 1])$. Obie przestrzenie rozpatrujemy z normą supremum. **Operator różniczkowania**
 $T : X \rightarrow Y$

$$(Tx)(t) := x'(t) \quad x \in C^{(1)}([0, 1]), t \in [0, 1],$$

jest poprawnie określony i liniowy oraz T jest **nieograniczony!**
Rzeczywiście, dla $x_n(t) = t^n$ mamy

$$\|x_n\|_\infty = 1 \quad \text{oraz} \quad \|Tx_n\| = \|x'_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |nt^{n-1}| = n \rightarrow \infty.$$

Standardowa norma na przestrzeni $C^{(1)}([0, 1])$ jest dana wzorem

$$\|x\|_1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|.$$

Z tą normą na X operator T jest ograniczony oraz $\|T\| = 1$.

Prz. 3 (Mnożenie przez funkcje)

Niech $X = Y = L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Dla $a \in L^\infty(\mu)$ wzór

$$(T_a x)(t) := a(t)x(t), \quad x \in L^p(\mu), t \in \Omega,$$

definiuje operator ograniczony $T_a : L^p(\mu) \rightarrow L^p(\mu)$, $\|T_a\| = \|a\|_\infty$.

Rzeczywiście, nierówność $\|T_a\| \leq \|a\|_\infty$ wynika z

$$\begin{aligned} \|T_a x\|_p &= \left(\int_\Omega |a(t)x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \|a\|_\infty^p \cdot |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_\infty \cdot \|x\|_p. \end{aligned}$$

Położmy $A_n := \{t : |a(t)|^p \geq \|a\|_\infty^p - 1/n\}$ oraz $x_n := \frac{1}{\mu(A_n)^{1/p}} \mathbb{1}_{A_n}$.

Wtedy $\|x_n\|_p = 1$ oraz

$$\begin{aligned} \|T_a x_n\|_p^p &= \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \int_{A_n} |a(t)|^p d\mu \\ &\geq \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \int_{A_n} \left(\|a\|_\infty^p - \frac{1}{n} \right) d\mu = \|a\|_\infty^p - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Zatem $\|T_a x_n\|_p \rightarrow \|a\|_\infty$ i stąd $\|T_a\| \geq \|a\|_\infty$.